ИЗВЕСТИЯ
ТОМСКОГО ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ И ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА им. С.М. КИРОВА

Том 294 1976

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ В ВЕЩЕСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В.М. РАЗИН

(Представлена научным семинаром кафедры вычислительной техники)

При расчетах активной биологической защиты представляется полезным получить уравнения движении релятивистских протонов в веществе при наличии магнитного поля, поскольку комбинированные способы защиты могут оказаться оптимальными в тех случаях, когда вес защитных экранов должен быть ограничен сверху.

Как известно, уравнение движения заряженной частицы в магнитном поле при отсутствии вещества в векторной форме имеет вид:

$$m\frac{dv}{dt}=\frac{e}{c}\left[\vec{v}\vec{B}\right], \tag{1}$$

где m – масса частицы; e – заряд; c – скорость света в вакууме; $\vec{v}$ – вектор скорости; $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции.

Поскольку нас будут интересовать частицы, скорость которых соизмерима со скоростью света, то уравнение (1) следует записать в форме соотношения

$$\frac{\overrightarrow{dp}}{dt}=\frac{e}{c}\left[\vec{v}\vec{B}\right], \tag{2}$$

где $\vec{p} = \overrightarrow{mv}$ – импульс частицы, масса которой зависит от энергии, т. е. скорости частицы.

При прохождении частицы через вещество будут иметь место различные взаимодействия частицы со средой, в результате чего энергия частицы будет уменьшаться вдоль траектории движения. В интересующем нас диапазоне энергий протонов главными являются потери энергии на ионизацию атомов защитной среды. Потери энергии на ионизации будут эквивалентны действию некоторой силы, действующей на частицу (протон) в направлении, противоположном направлению вектора скорости. Величина этой силы будет равна удельной энергии ионизации на элемент длины траектории l, т.е. сила равна $\frac{dE}{dl}$.

При учете силы сопротивления вещества за счет ионизации уравнение (2) может быть представлено в векторной форме:

$$\frac{\overrightarrow{dp}}{dt}=\frac{e}{c}\left[\vec{v}\vec{B}\right]-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\vec{v}}{v}, \tag{3}$$

где прямые скобки означают абсолютное значение соответствующей величины, а v – это модуль вектора скорости частицы.

В релятивистском случае левая часть уравнения (3) должна быть представлена следующим образом:

$$\frac{\overrightarrow{dp}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\vec{v}\right), \tag{4}$$

где m_0 – масса покоя частицы.

В трехмерной прямоугольной системе координат имеет место соотношение

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2, \tag{5}$$

где для сокращения записи первые производные по времени обозначены точками над соответствующими координатами.

Проекция векторного уравнения (4) на оси координат с учетом (5) дает возможность записать уравнение движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}}}\dot{x}\right)=\frac{e}{c}B_z\dot{y}-\frac{e}{c}B_y\dot{z}-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\dot{x}}{v};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}}}\dot{y}\right)=\frac{e}{c}B_x\dot{z}-\frac{e}{c}B_z\dot{x}-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\dot{y}}{v};\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}}}\dot{z}\right)=\frac{e}{c}B_y\dot{x}-\frac{e}{c}B_x\dot{y}-\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{\dot{z}}{v}.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Здесь B_x, B_y и B_z – составляющие вектора магнитной индукции по осям координат.

Для сокращения записи введем обозначение

$$\varphi(v)=\left|\frac{dE}{dl}\right|\frac{1}{v} \quad (7)$$

и правые части уравнений системы (6) представим в виде

$$\left.\begin{aligned}
&-\varphi(v)\dot{x}+\frac{e}{c}B_z\dot{y}-\frac{e}{c}B_y\dot{z}=L;\\
&-\frac{e}{c}B_z\dot{x}-\varphi(v)\dot{y}+\frac{e}{c}B_x\dot{z}=M;\\
&\frac{e}{c}B_y\dot{x}-\frac{e}{c}B_x\dot{y}-\varphi(v)\dot{z}=N.
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Раскрывая производные в левых частях системы (6) и учитывая (8), получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ddot{x}+\dot{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}}}\right)=L;\\
&\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ddot{y}+\dot{y}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}}}\right)=M;\\
&\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\ddot{z}+\dot{z}\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}}}\right)=N.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Здесь $\beta=\frac{v}{c}=\frac{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}{c}$ – релятивистский фактор, а две точки означает производную второго порядка по времени. Раскроем производную

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{x^2+y^2+z^2}{c}}}\right)=\frac{m_0}{c^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^3}}\cdot\left(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z}\right), \quad (10)$$

так как все координаты являются функциями времени. Подставляя (10) в систему уравнений (9) и выполняя несложные преобразования, получим

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}\left[c^2(1-\beta^2)+\dot{x}^2\right]+\dot{x}\dot{y}\ddot{y}+\dot{x}\dot{z}\ddot{z}=L_1,\\ &\dot{x}\dot{y}\ddot{x}+\ddot{y}\left[c^2(1-\beta^2)+\dot{y}^2\right]+\dot{y}\dot{z}\ddot{z}=M_1,\\ &\dot{x}\dot{z}\ddot{x}+\dot{y}\dot{z}\ddot{y}+\left[c^2(1-\beta^2)+\dot{z}^2\right]\ddot{z}=N_1. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Здесь введены для сокращения записи обозначения:

$$\left.\begin{aligned} L_1&=\frac{c^2\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0}\cdot L;\\ M_1&=\frac{c^2\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0}M;\\ N_1&=\frac{c^2\sqrt{(1-\beta^2)^3}}{m_0}N. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

При моделировании обыкновенных дифференциальных уравнений на аналоговых вычислительных машинах (АВМ) принято разрешать эти уравнения относительно старших производных (метод понижения порядка производной).

Рассматриваем систему (11), как систему трех уравнений с тремя неизвестными производными $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$.

Вычисляем главный определитель системы (11)

$$\Delta=\begin{vmatrix} c^2(1-\beta^2)+\dot{x}^2; & \dot{x}\dot{y}; & \dot{x}\dot{z};\\ \dot{x}\dot{y}; & c^2(1-\beta^2)+\dot{y}^2; & \dot{y}\dot{z};\\ \dot{x}\dot{z}; & \dot{y}\dot{z}; & c^2(1-\beta^2)+z^2; \end{vmatrix} \qquad (13)$$

Применяя правило Саррюса или какой-либо другой способ вычисления определителей и учитывая (5) в несложных, но громоздких преобразованиях, получим

$$\Delta=c^6(1-\beta^2)^2. \qquad (14)$$

Теперь выражение, например, для $\ddot{x}$ будет иметь вид

$$\ddot{x}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} L_1; & \dot{x}\dot{y}; & \dot{x}\dot{z};\\ M_1; & [c^2(1-\beta^2)+\dot{y}^2]; & \dot{y}\dot{z};\\ N_1; & \dot{y}\dot{z}; & [c^2(1-\beta^2)+\dot{z}^2]; \end{vmatrix} \qquad (15)$$

Громоздкие алгебраические преобразования при вычислении (15) позволяют в конечном итоге получить сравнительно простое выражение для $\ddot{x}$

$$\ddot{x}=\frac{1}{m_0}\left(\frac{e}{c}B_z\dot{y}-\frac{e}{c}B_y\dot{z}\right)\sqrt{1-\beta^2}-\frac{1}{m_0}\varphi(v)\dot{x}\sqrt{(1-\beta^2)^3}. \qquad (16)$$

Аналогично вычисляются выражения для $\ddot{y}$ и $\ddot{z}$. В результате получаем систему уравнений движения в виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
m_0\ddot{x} &= \left(\frac{e}{c}B_z\dot{y} - \frac{e}{c}B_y\dot{z}\right)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{x}\sqrt{(1-\beta^2)^3};\\
m_0\ddot{y} &= \left(\frac{e}{c}B_x\dot{z} - \frac{e}{c}B_z\dot{x}\right)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{y}\sqrt{(1-\beta^2)^3};\\
m_0\ddot{z} &= \left(\frac{e}{c}B_y\dot{x} - \frac{e}{c}B_x\dot{y}\right)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{z}\sqrt{(1-\beta^2)^3}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (17)
$$

При $\beta = 0$ получаем уравнения движения заряженной частицы в веществе при наличии магнитного поля для нерелятивистского случая

$$
\left.
\begin{aligned}
m_0\ddot{x} &= \frac{e}{c}B_z\dot{y} - \frac{e}{c}B_y\dot{z} - \varphi(v)\,\dot{x};\\
m_0\ddot{y} &= \frac{e}{c}B_x\dot{z} - \frac{e}{c}B_z\dot{x} - \varphi(v)\,\dot{y};\\
m_0\ddot{z} &= \frac{e}{c}B_y\dot{x} - \frac{e}{c}B_x\dot{y} - \varphi(v)\,\dot{z}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (18)
$$

Полученные уравнения движения имеют форму, удобную для моделирования на АВМ. В цилиндрической системе координат уравнения движения в релятивистском случае будут иметь вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
m_0(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= \frac{e}{c}(r\dot{\varphi}B_z - \dot{z}B_\varphi)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{r}\sqrt{(1-\beta^2)^3};\\
m_0\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= \frac{e}{c}(\dot{z}B_r - \dot{r}B_z)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,r\dot{\varphi}\sqrt{(1-\beta^2)^3};\\
m_0\ddot{z} &= \frac{e}{c}(\dot{r}B_\varphi - r\dot{\varphi}B_r)\sqrt{1-\beta^2} - \varphi(v)\,\dot{z}\sqrt{(1-\beta^2)^3}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (19)
$$

При моделировании на АВМ полезно также учитывать связи между кинетической энергией частицы и ее скоростью в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
\beta &= \frac{v}{c} = \frac{\sqrt{E(E-2E_0)}}{E+E_0};\\
E &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (20)
$$

Здесь $E_0 = m_0c^2$ – энергия покоя частицы.